Análisis Matemático I

1. En el intervalo $E =]0, 1]$ se define la distancia:

$$\rho(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \qquad \forall (x, y) \in E \times E$$

Prueba que (E, ρ) es un espacio métrico completo y que la distancia ρ es equivalente a la distancia usual en E.

2. Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subset E$ un compacto no vacío. Prueba que hay elementos $a \in K$, $b \in K$ tales que $\mathrm{diam}(K) = \mathrm{d}(a, b)$.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío y distinto de $\mathbb{R}^n$. Para cada $p \in \mathbb{N}$ se define:

$$K_p = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leqslant p, \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus A) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

Prueba que:

a) K_p es compacto y $K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$.

b) $\displaystyle\bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = A$.

c) Si $K \subset A$ es compacto, existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_p$.

4. Sea (E, d) un espacio métrico completo y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n \subset E$ un conjunto cerrado no vacío. Supongamos que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim\{\mathrm{diam}(F_n)\} = 0$. Prueba que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.